УДК 517.5

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ УЛЬЯНОВА

Т.Е. Тилеубаев[1]

1 *tileubaev@mail.ru*; Евразийский Национальный Университет имени Л.Н. Гумилева

В статье получены неравенства типа П.Л. Ульянова. Также изучается вопрос о соотношениях между наилучшими приближениями функции f в различных метриках.

Ключевые слова: неравенства типа Ульянова, наилучшее приближение, модуль гладкости.

Пусть $1 \le p \le \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $[0,\infty)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^\infty |f|^p x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0,\infty)$. Норма в пространстве определяется следующим образом:

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{x\in[0,\infty)} |f|, \quad p = \infty.$$

Рассмотрим в пространстве $L_{p,\alpha}$ оператор обобщенного сдвига [1] функции $f(x)$:

$$T^h f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\int_0^\pi f(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos\varphi})(\sin\varphi)^{2\alpha} d\varphi.$$

Отметим некоторые свойства оператора $T^h : L_{p,\alpha} \to L_{p,\alpha}$:

$$T^h j_\alpha(\lambda x) = j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda h),\ j_\alpha(u) = \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{u^\alpha} J_\alpha(u),$$

где $J_\alpha(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка α,

$$\left\|T^h(f)\right\|_{p,\alpha} \le C\|f\|_{p,\alpha}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

$$\int_0^\infty T^h f(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx = \int_0^\infty f(x) T^h g(x) x^{2\alpha+1} dx.$$

Для функции $f \in L_{p,\alpha}$ конечные разности $\Delta_h^k f(x)$ порядка $k (k = 1,2,...)$ с шагом $h > 0$ определим следующим образом:

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x) - T^h(x), \Delta_h^k f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{k-1} f(x)), k > 1.$$

Величину $\Omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} = \sup_{0<h\le\delta}\left\|\Delta_h^k f\right\|_{p,\alpha}$ будем называть обобщенным модулем гладкости k-го порядка функции $f \in L_{p,\alpha}$.

Обозначим через $M(\nu, p, \alpha), \nu > 0$ множество всех функций $Q_\nu(t)$, $t \in R$, удовлетворяющих следующим условиям : 1) $Q_\nu(t)$– четная целая функция экспоненциального типа ν, 2) $Q_\nu(t)$ принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ из класса $M(\nu, p, \alpha)$ определим следующим образом

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = \inf\{\left\| f - Q_\nu \right\|_{p,\alpha} : Q_\nu \in M(\nu, p, \alpha)\}.$$

Лемма. *Пусть* $1 < p < q < \infty, \tau = 2(\alpha+1)$ *Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m |Q_{n2^s}(x) - Q_{n2^{s-1}}(x)|\right)^q x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left\{\sum_{s=1}^m \left((n2^s)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} E_{n2^{s-1}}(f)_{p,\alpha}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Пусть $r = [q]+1, 1 < q < \infty$.

$$I(m) = \left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m |Q_{n2^s}(x) - Q_{n2^{s-1}}(x)|\right)^q x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m \psi_s(x)\right)^q x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m \psi_s^{\frac{q}{r}}(x)\right)^r x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left\{\sum_{s_1}^m \cdots \sum_{s_r}^m \int_0^\infty \psi_{s_1}^{\frac{q}{r}}(x) \cdots \psi_{s_r}^{\frac{q}{r}}(x) x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (1)$$

Так как

$$\left(\prod_{n=1}^r b_n\right)^{r-1} = \prod_{1 \le i < j \le r} b_i b_j,\ r > 1,$$

то применяя следующее неравенство Гельдера

$$\int_0^\infty g_1(x) \cdots g_n(x) x^{2\alpha+1} dx \le \left(\int_0^\infty |g_1(x)|^{\frac{1}{\tau_1}} x^{2\alpha+1}\right)^{\tau_1} \cdots \left(\int_0^\infty |g_n(x)|^{\frac{1}{\tau_n}} x^{2\alpha+1}\right)^{\tau_n},$$

с показателем $\tau_k = \frac{2}{r(r-1)},\ k = 1, \cdots, n = \frac{r(r-1)}{2},\ \tau_k > 0,\ \sum_{k=1}^n \tau_k = 1$ и полагая $g_k = \psi_{s_i}^{\frac{q}{r(r-1)}} \psi_{s_j}^{\frac{q}{r(r-1)}}$, имеем $I(m) \le \left\{\sum_{s_1}^m \cdots \sum_{s_r}^m \int_0^\infty \left(\prod_{1 \le i < j \le r} \psi_{s_i}^{\frac{q}{r}}(x) \psi_{s_j}^{\frac{q}{r}}(x)\right)^{\frac{1}{r-1}} x^{2\alpha-1}\right\}^{\frac{1}{q}} \le$ $\left\{\sum_{s_1}^m \cdots \sum_{s_r}^m \prod_{1 \le i < j \le r} \left(\int_0^\infty \psi_{s_i}^{\frac{q}{r}}(x) \psi_{s_j}^{\frac{q}{r}}(x) x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{2}{r(r-1)}}\right\}^{\frac{1}{q}}.$

Теперь оценим следующий интеграл

$$\int_0^\infty \psi_{s_i}^{\frac{q}{r}}(x) \psi_{s_j}^{\frac{q}{r}}(x) x^{2\alpha+1} dx,$$

применив неравенства Гельдера с параметрами $q_2 = \frac{p+q}{p}, q_1 = \frac{(p+q)q}{2p}, q_2^{-1} + q_1^{-1} = 1$ и неравенства разных метрик (см. [2], теорему 3.5) с параметрами $q_2 > p, q_1 > p$ дважды, имеем

$$\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^{\frac{q}{2}} (\psi_{l_j}(x))^{\frac{q}{2}} x^{2\alpha+1} dx \le$$

$$\left(\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^{\frac{(p+q)q}{2p}} x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{p}{(p+q)}} \left(\int_0^\infty (\psi_{l_j}(x))^{\frac{(p+q)}{2}} x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{q}{(p+q)}} \le$$

$$C\left((n2^{l_i})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_2})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}} (n2^{l_j})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_j}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{q}{2}} \le$$

$$C\left((n2^{l_i})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}} (n2^{l_j})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_j}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{q}{2}} \times$$

$$\left(2^{\tau(l_i-l_j)}\right)^{\frac{q-p}{2(p+q)}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$I(m) \le$$

$$C\left[\left\{\sum_{l_1=1}^m \cdot \sum_{l_r=1}^m \prod_{1\le i<j\le r} \left((n2^{l_i})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_i}\|_{p,\alpha} (n2^{l_j})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_j}\|_{p,\alpha}\right)^q 2^{-\tau|l_i-l_j|\frac{(q-p)}{p+q}}\right\}^{\frac{1}{r(r-1)}}\right]^{\frac{1}{q}}. \quad (3)$$

Так как $\prod_{1\le i<j\le r} b_{l_i} b_{l_j} 2^{-|l_l-l_j|\beta} = \prod_{s=1}^r b_{l_s}^{r-1} \prod_{k=1}^r 2^{-|l_s-l_k|\frac{\beta}{2}}$, где $b_s \ge 0, 1 \le s \le r, \beta > 0$, полагая $b_{l_s} = \left((\sigma 2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^{\frac{q}{r(r-1)}}$, $\beta = \tau\frac{q-p}{(q+p)r(r-1)}$, в силу неравенства Гельдера следующего вида для сумм с показателем $\lambda_k > 0, \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1$ ([4])

$$\sum_k b_k(1)\cdots b_k(r) \le \left(\sum_k |b_k(1)|^{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\sum_k |b_k(r)|^{\frac{1}{\lambda_r}}\right)^{\lambda_r}$$

из неравенства (3) имеем

$$I(m) \le C\left(\prod_{s=1}^r \left[\sum_{l_1=1}^m \cdot \sum_{l_r=1}^m \left((n2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^q \prod_{k=1}^r 2^{-\tau|l_s-l_k|\frac{q-p}{2(p+q)(r-1)}}\right]^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$c\left\{\prod_{s=1}^r \left(\sum_{l_1=1}^m \cdot \sum_{l_r=1}^m \left((n2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^q \prod_{k=1}^r 2^{-\tau|l_s-l_k|\frac{q-p}{2(p+q)(r-1)}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\left\{\sum_{l_1=1}^m \left((n2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^q \sum_{l_2=1}^m \cdots \sum_{l_r=1}^m \prod_{k=1}^r 2^{-\tau|l_1-l_k|\frac{q-p}{2(p+q)(r-1)}}\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

В силу оценки

$$\sum_{l=1}^m 2^{-|l-l_1|\beta} \le M(\beta)$$

получим

$$\sum_{l_2=1}^{m}\cdots\sum_{l_r=1}^{m}\prod_{k=1}^{r}2^{-|l_k-l_1|\beta}2^{-|l-l_1|\beta}=\sum_{l_2=1}^{m}\cdots\sum_{l_r=1}^{m}\prod_{k=2}^{r}2^{-|l_k-l_1|\beta}2^{-|l-l_1|\beta}\le$$

$$\prod_{k=2}^{r}\sum_{l_k=1}^{m}2^{-|l_k-l_1|\beta}=M^{r-1}(\beta).$$

Поэтому, учитывая предыдущие неравенства и следующие неравенства $\|\psi_l\|_{p,\alpha}\le\|Q_{n2^l}-Q_{n2^{l-1}}\|_{p,\alpha}\le 2E_{n2^{l-1}}(f)_{p,\alpha}$ имеем

$$I(m)\le C\left(\sum_{l=1}^{m}(n2^l)^{q\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\psi_l\|_{p,\alpha}^q\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\sum_{l=1}^{m}(n2^l)^{q\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E_{n2^{l-1}}^q(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отметим, что идея доказательства леммы заимствована из работы М.Ф. Тимана [3, теорема 2].

Теорема 1. *Пусть* $1<p<q<\infty, f\in L_{p,\alpha},\theta=\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}),\tau=2(\alpha+1)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\|f\|_{q,\alpha}\le C\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}+\|f\|_{p,\alpha}\right), \tag{4}$$

$$E_n(f)_{q,\alpha}\le C\left\{\sum_{k=n}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Доказательство. Если мы покажем сходимость последовательности $Q_{n2^m}-Q_n$ в пространстве $L_{q,\alpha}$, то в силу полноты пространства $L_{q,\alpha}$ предельные функции $f-Q_n\in L_{q,\alpha}$ и соответственно $f\in L_{q,\alpha}$. Для этого, используя лемму, имеем

$$\|f-Q_n\|_{q,\alpha}\le\lim_{m\to\infty}\|Q_{n2^m}-Q_n\|_{q,\alpha}=\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{l=1}^{m}Q_{n2^l}-Q_{n2^{l-1}}\right\|_{q,\alpha}\le$$

$$C\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left((n2^l)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E_{n2^{l-1}(f)_{p,\alpha}}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\le C\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\left((n2^l)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E_{n2^{l-1}(f)_{p,\alpha}}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательства неравенств (4)и(5) следует из предыдущей оценки и следующего неравенства $E_\nu(f)_{q,\alpha}\le A\|f-Q_\nu\|_{q,\alpha}$.

Теорема 2. *Пусть* $1<p<q<\infty, f\in L_{p,\alpha}$. *Если для некоторого* q $(1<p<q<\infty)$ *ряд сходится*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}<\infty,$$

то $f\in L_{q,\alpha}$ *и справедливы неравенства*

$$\|f\|_{q,\alpha}\le C\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}+\|f\|_{p,\alpha}\right) \tag{6}$$

$$E_n(f)_{q,\alpha} \le C\left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < q < \infty, f \in L_{p,\alpha}$. *Если для некоторого* q $(1 < p < q < \infty)$ *ряд сходится*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q\theta-1}\Omega_m(f,\frac{1}{k})_{p,\alpha}^q < \infty,$$

то $f \in L_{q,\alpha}$ *и справедливы неравенства*

$$\|f\|_{q,\alpha} \le C\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{q\theta-1}\Omega_m(f,\frac{1}{k})_{p,\alpha}^q\right\}^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{p,\alpha}\right), \tag{8}$$

$$\Omega_m(f,\frac{1}{n})_{q,\alpha} \le C\left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{q\theta-1}\Omega_m(f,\frac{1}{k})^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{9}$$

Теорема 4. *Условия (7) и (9) эквивалентны.*

Если $1 \le p < q \le \infty$ и $\lambda = \{\lambda_n\}$– последовательность чисел с $\lambda_n \downarrow 0$, то $E_{p,\alpha}(\lambda)$ означает класс всех функций $f \in L_{p,\alpha}$, для которых $E_n(f)_{p,\alpha} = O(\lambda_n)$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < q < \infty, f \in L_{p,\alpha}$ *и* λ_n– *последовательность положительных чисел с* $\lambda_n \downarrow 0$. *Тогда для того чтобы имело место вложение* $E_{p,\alpha}(\lambda) \hookrightarrow L_{q,\alpha}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q\theta-1}\lambda_k^q < \infty.$$

Доказательства теоремы 5 проводим по схеме В. И. Коляды [5].

Литература

1. Левитан Б. М. *Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* // УМН. – 1951. – Т. 6. – № 2. – С. 102–143.

2. Платонов С. С. *Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полу прямой*// Изв. РАН серия математика. – 2007. – Т. 71. – № 5. – С. 149–196.

3. Timan M. F. *Orthogonal systems satisfying an inequality of S. M. Nikolskii*// Analysis mathematica. – 1978. – T. 46. – № 4. – C. 75-82.

4. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды* – М.: Мир, 1965. – 539 с.

5. Коляда В. И. *Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений*// Мат. сб. – 1977. – Т. 102. – № 2. – С. 195–215.

6. Ульянов П. Л. *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках* // Мат. сб. – 1970. – Т. 81. – № 1. – С. 104–131.

ON A INEQUALITY OF P.L. UL'YANOV

T.E. Tileubayev

In this paper an inequality of P. L. Ulyanov and the relation between the best approximations of functions f in various metrics is studied.

Keywords: inequality of P.L. Ul'yanov, the best approximation, moduli of smoothness.